145 260 J. 2463

MATHS III (M1)

DURÉE : 3 heures

0. Notations

On identifie $\mathbb{R}^2$ au plan euclidien muni de la distance $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2$, $d((x, y); (\xi, \tau)) = ((x - \xi)^2 + (y - \tau)^2)^{\frac{1}{2}}$. Dans ce plan $\mathbb{R}^2$, on se donne trois points *non alignés* (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3). On note T le triangle de sommets (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3); on notera S l'aire (géométrique) de T et h la longueur du plus grand côté de T.

D'autre part pour k entier supérieur ou égal à 1, on désigne par $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k inclus. Si f est une fonction de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2)$, $k \geqslant 1$, on pose :

$$[f]_k = \max_{0 \leqslant m \leqslant k} \max_{(x,y) \in T} \left(\left| \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^{k-m} \partial y^m} \right| \right).$$

On introduira le sous-espace $\mathcal{N}_k$ de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$\mathcal{N}_k = \{ f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2) ; \quad [f]_k = 0 \}.$$

I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1 et f une fonction de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2)$.

1° Soit (x_0, y_0) et (x, y) deux points quelconques du triangle T.

a. Montrer que la fonction g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = f((1 - t) x_0 + t x, \ (1 - t) y_0 + t y)$$

est k fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée d'ordre k vérifie :

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |g^{(k)}(t)| \leqslant (h\sqrt{2})^k [f]_k.$$

b. En déduire que l'on a :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0) - A| \leqslant \frac{(\sqrt{2})^k}{k!} h^k [f]_k$$

où l'on a posé

$$A = \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!(m - l)!} (x - x_0)^{m-l} (y - y_0)^l \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^{m-l} \partial y^l}.$$

2° Démontrer qu'une fonction f de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2)$ appartient au sous-espace $\mathcal{N}_k$ si et seulement si il existe un polynôme p à deux variables de degré inférieur ou égal à $(k - 1)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in T, \quad f(x, y) = p(x, y).$$

Pour f donné dans $\mathcal{N}_k$, un tel polynôme p est-il unique?

3° On suppose dans cette question :

$$k \geqslant 2 \quad \text{et} \quad f \in \mathcal{N}_k.$$

Soit Δ une droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation normale :

$$a x + b y + c = 0.$$

Démontrer que si f s'annule en k points distincts de $\Delta \cap T$, alors il existe un polynôme q à deux variables de degré inférieur ou égal à $(k - 2)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in T, \quad f(x, y) = (ax + by + c) q(x, y).$$

II

1° Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 \lambda_1(x, y) + x_2 \lambda_2(x, y) + x_3 \lambda_3(x, y) = x, \\ y_1 \lambda_1(x, y) + y_2 \lambda_2(x, y) + y_3 \lambda_3(x, y) = y, \\ \lambda_1(x, y) + \lambda_2(x, y) + \lambda_3(x, y) = 1, \end{cases}$$

admet une solution $(\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y), \lambda_3(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ et une seule et que les trois fonctions λ_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, ainsi définies appartiennent à $\mathcal{N}_2$.

Tournez la page S. V. P.

ENS ST-CLOUD FONTENAY 81

Faire une figure sur laquelle on tracera les courbes :

$$\lambda_3 = 0 \quad ; \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lambda_3 = 1.$$

2° *a.* Vérifier que si f est une fonction de $\mathcal{H}_3$, on a :

$$\forall (x, y) \in T, \qquad f(x, y) = \sum_{i=1}^{3} f(x_i, y_i)\, \lambda_i(x, y).$$

b. En utilisant un développement de Taylor en (x, y) de $f(x_i, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, démontrer que pour toute fonction f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$\forall (x, y) \in T, \qquad |f(x, y) - \sum_{i=1}^{3} f(x_i, y_i)\, \lambda_i(x, y)| \leqslant \gamma_2\, h^3 [f]_3$$

avec

$$\gamma_2 = \max_{(x,y) \in T} \left(\sum_{i=1}^{3} |\lambda_i(x, y)| \right).$$

c. Calculer le nombre γ_2.

3° On note (x_{i+3}, y_{i+3}) le milieu du côté de T opposé au sommet (x_i, y_i), $1 \leqslant i \leqslant 3$. On introduit d'autre part les fonctions :

$\mu_1 = \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)$; $\mu_2 = \lambda_2(-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)$; $\mu_3 = \lambda_3(-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$;

$\mu_4 = 4\lambda_2\lambda_3$; $\mu_5 = 4\lambda_3\lambda_1$; $\mu_6 = 4\lambda_1\lambda_2$.

a. Vérifier que si f est une fonction de $\mathcal{H}_3$, on a :

$$\forall (x, y) \in T, \qquad f(x, y) = \sum_{i=1}^{6} f(x_i, y_i)\, \mu_i(x, y).$$

b. Démontrer que l'on a pour toute fonction f de $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall (x, y) \in T, \quad |f(x, y) - \sum_{i=1}^{6} f(x_i, y_i)\, \mu_i(x, y)| \leqslant \gamma_3\, h^3 [f]_3$$

avec

$$\gamma_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \max_{(x,y) \in T} \left(\sum_{i=1}^{6} |\mu_i(x\ y)| \right).$$

III

1° *a.* Soit $(l, m) \in \mathbb{N}^2$ et $\tau \in \mathbb{R}$; calculer $\int_0^\tau t^l (\tau - t)^m\, dt$.

b. Soit (l, m, n) é $\mathbb{N}^3$ et $\hat{T}$ le triangle rectangle isocèle :

$$\hat{T} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ 0 \leqslant x + y \leqslant 1 \}.$$

Démontrer que :

$$\iint_{\hat{T}} x^l\, y^m\, (1 - x - y)^n\, dx\, dy = \frac{(l!)\ (m!)\ (n!)}{(l + m + n + 2)!}.$$

2° Les fonctions λ_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, étant définies en II 1°, démontrer que l'on a pour tout triplet (l, m, n) de $\mathbb{N}^3$:

$$\iint_{T} \lambda_1^l(x, y)\, \lambda_2^m(x, y)\, \lambda_3^n(x, y)\, dx\, dy = 2S\, \frac{(l!)\ (m!)\ (n!)}{(l + m + n + 2)!}.$$

Tournez la page S. V. P.

1620

3° *a.* Démontrer la propriété suivante :

$$(\mathfrak{P}_2) \qquad \forall\, f \in \mathfrak{N}_2\,, \qquad \iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \frac{S}{3} \sum_{i=1}^{3} f(x_i, y_i)\,.$$

b. Donner une fonction f de $\mathfrak{N}_3$ qui ne vérifie pas la propriété $(\mathfrak{P}_2)$.

c. Démontrer que l'on a pour toute fonction f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\left| \iint_T f(x, y)\, dx\, dy - \frac{S}{3} \sum_{i=1}^{3} f(x_i, y_i) \right| \leqslant \gamma_2\, S\, h^2 [f]_2\,.$$

4° *a.* Démontrer la propriété suivante :

$$(\mathfrak{P}_3) \qquad \forall\, f \in \mathfrak{N}_3\,, \qquad \iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \frac{S}{3} \sum_{i=4}^{6} f(x_i, y_i)\,.$$

b. Donner une fonction f de $\mathfrak{N}_4$ qui ne vérifie pas la propriété $(\mathfrak{P}_3)$.

c. Démontrer que l'on a pour toute fonction f de $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$:

$$\left| \iint_T f(x, y)\, dx\, dy - \frac{S}{3} \sum_{i=4}^{6} f(x_i, y_i) \right| \leqslant \gamma_3\, S\, h^3 [f]_3\,.$$

5° Calculer le nombre γ_3.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail